6/12/2019

Θεωρία Συνόλων.

Άσκηση (φυλλαδίου)

$n, m \in \mathbb{N}$

$n \cong m \Rightarrow \boxed{m = n}$

$\exists f: n \to m$ 1-1, επί

$f^{-1}: m \to n$, -//-

Σκέψη: $x \leq y \Leftrightarrow x \in y$ ή $x = y$, $x, y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Αν $m \neq n$ (με άτοπο)

$m < n$ ή $n < m$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ ανάλογα με το δίπλα.

$\left.\begin{matrix} m \in n \\ n: \text{μεταβατικό} \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \subseteq n$ $\Rightarrow m \subsetneq n$ (γνήσιο υποσύνολο.)

$m \in n$

όμως $m \notin m$

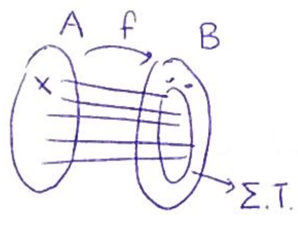
$f: n \xrightarrow{1-1} m$ επί (π.ο n, π.τ m) ($m \subsetneq n$)

Σημείωση Σύνολο τιμών $(\Sigma.T) = R(f) =$

$= \{ y \in B : \exists x \in A : f(x) = y \} =$

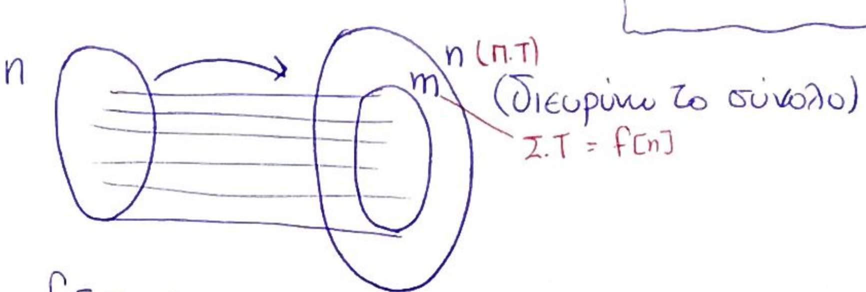
$= f(A)$

$f: A \to B$ επί (ΠΟ A, ΠΤ B)



Η απεικόνιση μπορεί να θεωρηθεί

$f: n \to m \Rightarrow f: n \xrightarrow{1-1} n$ ⊛



$f[n] = m.$

⊛ Η f δεν είναι επί διότι (αν ήταν επί $f[n] = m \subsetneq n$, $f[n] = n$

άτοπο

$m < n$ $\Rightarrow f[n] \subsetneq n$)

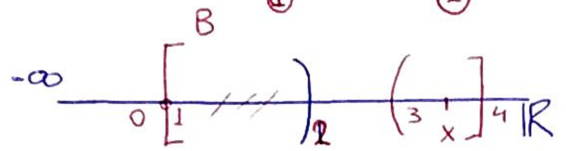
$n < m$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

$(\mathbb{N}, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο

(σημαίνει μερικά διατεταγμένο, αλλά επιπλέον $\forall B \subseteq \mathbb{N},\ B \neq \emptyset,\ \exists \min\limits_{(\mathbb{N}, \leq)} B = \beta_0$

δηλ. $\exists \underbrace{\beta_0 \in B}_{①} : \underbrace{\beta_0 \leq x,\ \forall x \in B}_{②}$. β_0 κ.φ του B.



$1 \in B$

$1 \leq$ από οποιοδήποτε σημείο του συνόλου.

3 κάτω φράγμα $\notin (3,4]$

$\boxed{3 \leq x,\ \forall x \in B}$ όμως $3 \notin B$

άρα 3 inf B (κάτω φράγμα)

*Διαβάζω την διάταξη από θεμελιώδης έννοιες.

Αν $B \subseteq (E, \leq)$

↳(μερικά διατ)

$\underbrace{\beta_0 \in B}_{①},\ \underbrace{\beta_0 \leq x\ \forall x \in B}_{②}$

Θα είναι μοναδικό διότι αν $\exists \underbrace{\beta_1 \in B}_{①},\ \underbrace{\beta_1 \leq x,\ \forall x \in B}_{②}$ $\left| \begin{array}{l} \Rightarrow \beta_0 \leq \beta_1 \\ \Rightarrow \beta_0 = \beta_1 \\ \Rightarrow \beta_1 \leq \beta_0 \end{array} \right.$

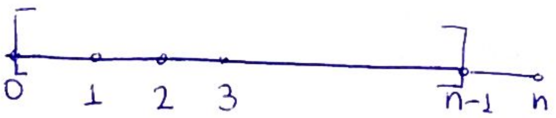
αν $\exists$ ελάχιστο, τότε είναι μοναδικό.

→ Όλα τα μη κενά έχουν ελάχιστο

Αποδ (θεωρήματος)

Έστω $B \subseteq \mathbb{N},\ B \neq \emptyset$, τ.ω το B να μην έχει ελάχιστο στοιχείο ($\nexists \min B$)

Θα καταλήξω με άτοπο $A = \{n \in \mathbb{N} : n \cap B = \emptyset\}$ Αν δ.ο $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n \cap B = \emptyset$ (δηλ $A = \mathbb{N}$)



$\boxed{\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} n}$ Γιατί ισχύει; $\left\{ \begin{array}{l} \text{Διότι } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \subseteq \mathbb{N} \text{ (Επαγωγικά)} \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} n \subseteq \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} n \Rightarrow x \in \mathbb{N} \text{ αρκεί νδο } \exists n \in \mathbb{N} : x \in n,\ n = x^+ = x \cup \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in x^+ = n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \cap B = \emptyset \Rightarrow (\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n}_{\mathbb{N}}) \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n \cap B) = \bigcup \emptyset = \emptyset \Rightarrow \underbrace{\mathbb{N} \cap B = \emptyset}$

$\Rightarrow B = \emptyset$ άτοπο

$(B \neq \emptyset)$

Αρκεί νδο (για να καταλ. σε άτοπο) ότι $A = \mathbb{N}$

Αρκεί νδο A επαγωγικό $\subseteq \mathbb{N}$

$0 \in A$, $0 \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$ φανερά.

$n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

$n \in A \Rightarrow n \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow \forall m \in B,\ m \notin n$

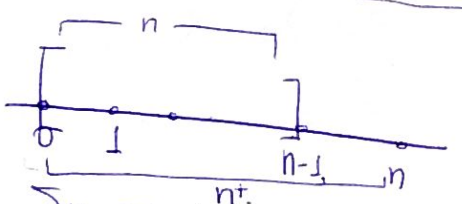
$m \in B,\ m \not< n$

$\Rightarrow \forall m \geq n,\ \forall m \in B$ ($\leq$ γραμμική στο $\mathbb{N}$)

$\Downarrow$

$n \notin B$. (Στόχος $n^+ \in A \Longleftrightarrow (n \cup \{n\}) \cap B = \emptyset$

όμως $(\underbrace{n \cap B}_{=\emptyset}) \cup (\underbrace{\{n\} \cap B}_{=\emptyset}) = \emptyset$)



δεν περιέχει στοιχεία του B.

$A = \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$n \cap B = \emptyset$. $\Rightarrow B = \emptyset$ άτοπο.

$x_0 \in X_0 \neq \emptyset$

$f: \{0\} \to X_0$

$f(0) = x_0 \in X_0$

$\underset{x_0}{\overset{}{}}\ \ X_0, X_1, \ldots, X_n$ με $x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1,\ \ldots,\ x_n \in X_n$

$\exists \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ σύνολο.

$\exists f: \underbrace{\{0, 1, 2, \ldots, n\}}_{I} \to \bigcup_{i=0}^{n} X_i \qquad f(i) = x_i \in X_i$, $0 \leq i \leq n$

ΑΞΙΩΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

$\forall\, I \neq \emptyset$ σύνολο δεικτών, $\forall (X_i)_{i\in I}$ οικογένεια μη κενών συνόλων $(\neq \emptyset)$

$\Rightarrow \exists\, f: I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ $\qquad \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$

$f(i) \in X_i,\ \forall i \in I$

$X_i \neq \emptyset$

$$Y = \prod_{i\in I} X_i \ \underset{\text{ορισμό}}{=} \left\{ g: I \to \bigcup_{i\in I} X_i,\ g(i) \in X_i,\ \forall i \in I \right\}$$

Για δυο σύνολα: X_0, X_1

Καρτεσιανό γινόμενο.

$$\prod_{i=0}^{1} X_i = \left\{ f: \{0,1\} \to X_0 \cup X_1 : f(0) \in X_0,\ f(1) \in X_1 \right\} \underset{\substack{1-1 \\ \text{επί}}}{\overset{T}{\cong}} X_0 \times X_1$$

$I = \{0,1\}$

$$\underset{\substack{\in \\ \prod_{i=0}^{1} X_i}}{T}(f) = \big(\underset{\substack{\in \\ X_0}}{f(0)}, \underset{\substack{\in \\ X_1}}{f(1)} \big)$$

Είναι 1-1 και επί.

Επί σημαίνει $\quad T: \prod_{i=0}^{1} X_i \to X_0 \times X_1$

$\exists\, f: T(f) = (x_0, x_1)$

$f(0) = x_0 \quad f(1) = x_1$

$$\prod_{i=0}^{1} X_i \cong X_0 \times X_1 \neq \emptyset.$$

$$\boxed{X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n \cong \prod_{i\in\{0,1,\dots,n\}} X_i \neq \emptyset.}$$

$X_0 \times X_1 \neq \emptyset$

$\exists (x_0, x_1) \in X_0 \times X_1$

$\exists x_0 \in X_0 \wedge \exists x_1 \in X_1$

$\exists f : \{0,1\} \to X_0 \cup X_1 : f(0) \in X_0,\ f(1) \in X_1$

—— o ——

$\underset{\text{σύνολο}}{f : A} \to B$

Σ.Τ $f(A) \overset{\text{σύνολο} \subseteq B}{=} \Big\{ y \in B : \big(\underbrace{\exists x_0 \in A : f(x) = y}_{P(y)\ \text{αληθής.}}\big) \Big\}$ αξίωμα προσδιορισμού

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>:

Αξίωμα επιλογής $\Longleftrightarrow$ $\Big[\ \forall A, B$ σύνολα

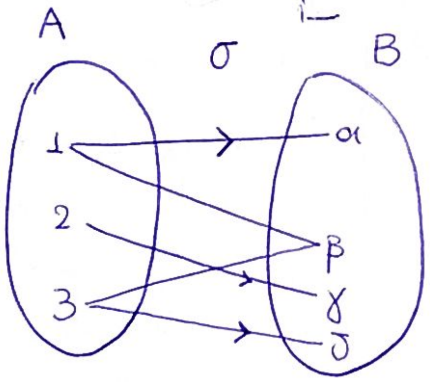
$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$

$\forall$ σχέση $\sigma \subseteq A \times B$, με πεδίο $Dom(\sigma) = A$

$\forall x$

$\Updownarrow$

$\exists \underset{\text{συνάρτ}}{f} : A \to B,\ f \subseteq \sigma\ \Big]$



<u>Πχ</u>

$\sigma = \{ \overbrace{(1,\alpha), (1,\beta)}^{x_0}, \overbrace{(2,\gamma)}^{x_1}, \overbrace{(3,\beta), (3,\delta)}^{x_2} \}$

$\sigma \subseteq A \times B$

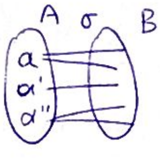
$f : A \to B$, $f(1) = \alpha$, $f(2) = \gamma$, $f(3) = \delta$ ή $f = \{(1,\alpha), (2,\gamma), (3,\delta)\}$

$\hookrightarrow f \subseteq \sigma$.

<u>Αποδ</u> $\Rightarrow$) Έστω ότι ισχύει το αξίωμα της επιλογής.

Δείχνουμε το ζητούμενο. Έστω τυχαία A, B, $\sigma \subseteq A \times B$, $Dom(\sigma) = A$.

Θα βρω την $f : A \to B$



Έστω τυχαίο $\alpha \in A$, $\Sigma_\alpha = \{ b \in B : (\alpha, b) \in \sigma \} \subseteq B$

$\alpha \in A_i = Dom(\sigma) \Rightarrow \Sigma_\alpha \neq \emptyset$, σύνολο.

$\left.\begin{array}{l} I = A \neq \emptyset \\ \forall \alpha \in A,\ X_\alpha \neq \emptyset \end{array}\right\}$ $\Sigma_\alpha = \{ b \in B : \underset{(\alpha,b) \in \sigma}{\alpha \sigma b} \} \neq \emptyset$. Από αξίωμα επιλογής: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$.

$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \Longleftrightarrow \exists\, f: A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : f(\alpha)\in X_\alpha,\ \forall \alpha\in A.$

$\Rightarrow (\alpha, f(\alpha)) \in \sigma,\ \forall \alpha \in A.$

$X_\alpha = \Sigma_\alpha,\quad f: A \to B \quad f(\alpha)\in \Sigma_\alpha,\ \forall \alpha\in A$

$\Longleftrightarrow \left(\Sigma_\alpha = \{ b\in B : (\alpha, b)\in\sigma\}\right.$

$\Downarrow$

$f \subseteq \sigma.$

Έστω τυχαίο στοιχείο $(\alpha, f(\alpha))\in f$

θδο $(\alpha, f(\alpha))\in\sigma.$

$f: A\to B$

$f = \{(\alpha, f(\alpha)) : \alpha\in A\}$
$\cap\!\!|$
$\sigma.$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\left[\forall\, A, B \text{ σύνολα}, \forall\, \sigma\subseteq A\times B,\ Dom(\sigma) = A \Rightarrow \exists\, f: A\to B\ \ f\subseteq\sigma\right]$

Θα δείξουμε το αξίωμα της επιλογής.

Έστω $I\neq\emptyset$ σύνολο δεικτών $\boxed{X_i\neq\emptyset,\ \forall i\in I}$

θ.δ.ο $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$

αρκεί να βρούμε $f: I \to \bigcup_{i\in I} X_i : f(i)\in X_i,\ \forall i\in I.$

$A = I$

$B = \bigcup_{i\in I} X_i$

$\sigma \subseteq A\times B = I \times \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$

$i\in I,\ y\in \bigcup_{j\in I} X_j$, ορίζουμε την σ

$(i,y)\in\sigma \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} y\in X_i$

$f\subseteq\sigma \Rightarrow f(i)\in X_i,\ \forall i\in I$
$(i, f(i))\in\sigma \Rightarrow (i,y)\in\sigma \Leftarrow y\in X_i.$

$Dom(\sigma) = \{ i\in I : \exists y\in \bigcup_{j\in I} X_j,\ (i,j)\in\sigma\}$

$Dom(\sigma) = I$ (Διότι $i\in I \Rightarrow X_i\neq\emptyset$
$\Rightarrow y_i \in X_i$)
$\Rightarrow (i, y_i)\in\sigma$
$\Rightarrow i\in Dom(\sigma).$

Από Υπόθεση

$\exists P: A = I \to B = \bigcup_{j\in I} X_j$

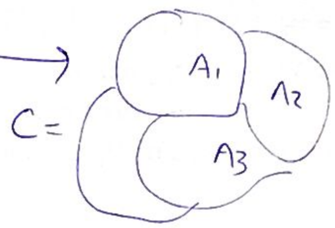
$: f \subseteq \sigma$

$\forall i \in I$, $(i, f(i)) \in f \subseteq \sigma \Rightarrow (i, \underbrace{f(i)}_{j}) \in \sigma \xRightarrow{\text{ορο } \sigma} f(i) \in X_i \to f \in \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Αξίωμα επιλογής $\longleftrightarrow$ $\forall$ ξένη οικογένεια συνόλων C, (*)

$\exists A \subseteq \bigcup C$, ώστε $A \cap X$: μονοσύνολο

$\forall X \in C$.

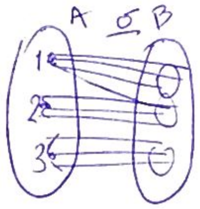


<u>Αποδ</u>

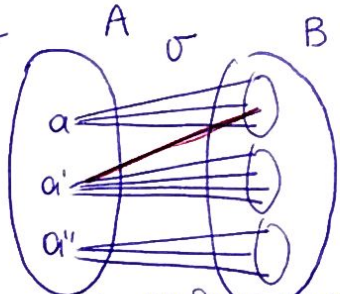
$\Leftarrow$) Έστω ισχύει η υπόθεση (*) ΘΔο: αν $\sigma \subseteq A\times B$, $Dom(\sigma) = A$

Τότε $\exists f: A \to B$ ώστε $f \subseteq \sigma$.

Έστω $\sigma \subseteq A\times B$, $D(\sigma) = A$.



<u>α∈A</u>



$C = \{ K_\alpha \quad : \alpha \in A \}$

Έστω $\alpha \in A$ σταθεροποιημένο.

$\alpha \in A \quad K_\alpha = \{ (\alpha, b),\ \alpha \sigma b \} = \{ (\alpha, b) : (\alpha, b) \in \sigma \}$

τον καρτεσιανό γινόμενο

$= (\{\alpha\} \times B) \cap \sigma = K_\alpha$

$\{ K_\alpha, \alpha \in A \}$

$\alpha \neq \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in A$

Θέλω α, α' ξένα

$K_\alpha \cap K_{\alpha'} = \emptyset$

$\bar{x} \in K_\alpha \cap K_{\alpha'} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} \in K_\alpha \Rightarrow \bar{x} = (\alpha, b_1),\ b_1\ \alpha \sigma b_1 \\ \bar{x} \in K_{\alpha'} \Rightarrow \bar{x} = (\alpha', b_2),\ b_2\ \alpha' \sigma b_2 \end{cases}$ Επειδή $\alpha \neq \alpha'$

$(\alpha, b_1) \neq (\alpha', b_2)$

$\bar{x} \neq \bar{x}$ άτοπο.

Άρα $K_\alpha \cap K_{\alpha'} = \emptyset$

άρα $\nexists\, x \in K_\alpha \cap K_{\alpha'}$

$\{K_a, a\in A\} = C$ ξένη συλλογή $\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists S \subseteq \cup C = \bigcup_{a\in A} K_a$, $S \cap K_a$ μονοσύνολο.

δηλ $S\cap K_a = \{(a, y_a)\}$

$(a, y_a) \in K_a \Rightarrow (a, y_a) \in \sigma$.

Ορίζω συνάρτηση $f: A \to B$

$f(a) = y_a$, συνάρτηση

Τέλος $f \subseteq \sigma$

$\left.\begin{array}{l} \uparrow \\ (a, f(a)) \in \sigma \Longleftrightarrow (a, y_a) \in \sigma \text{ εξ ορισμού} \\ \forall a \in A \end{array}\right\}$ $f \subseteq \sigma$.